

<b>Informatique en CPGE (2018-2019)</b> <b>Exercices divers</b>
--

### Exercice 1

On range au hasard  $n$  livres sur  $n$  étagères. A la fin, une étagère peut supporter 0, 1 ou plusieurs livres. On note  $X_n$  le nombre d'étagères supportant plusieurs livres. A l'aide de simulations, estimer  $X_n/n$ . Vérifier que cette valeur tend vers  $1 - 2/e$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 2

Un mobile se déplace de manière aléatoire sur un axe gradué. A l'instant  $t = 0$  il est placé à l'origine, et à chaque instant entier il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité  $p$  et d'une unité vers la gauche avec la probabilité  $1 - p$ . Soit  $X_n$  son abscisse après  $n$  déplacements.

Représenter graphiquement  $X_n$  et  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  pour  $p = 0,5$  puis pour  $p = 0,6$ . Tracer 5 marches aléatoires sur un même graphique pour chaque valeur de  $p$ .

### Exercice 3

1. Ecrire une fonction `produit` qui prend en arguments deux matrices A et B et renvoie la matrice produit A.B. On suppose les matrices carrées de même dimensions.
2. Ecrire une fonction `puissance` qui prend en arguments une matrice A et un entier naturel k et renvoie la matrice  $A^k$ . (Ecrire une version non récursive puis une version récursive).

### Exercice 4

Chiffrement de Hill

Un texte est supposé écrit en lettres capitales. Le principe consiste à chiffrer les caractères, non pas un par un, mais par groupe de caractères consécutifs.

Voyons le principe avec des groupes de deux caractères. Si le nombre total de caractères est impair, on ajoute au message un caractère choisi au hasard.

Nous considérons le message écrit avec des caractères dont le code ASCII est compris strictement entre 31 et 91, soit  $31 < \text{ord}(c) < 91$ , (lettres capitales, chiffres, ponctuation, espace), soit 59 caractères. Chaque caractère peut donc être représenté par un entier de 0 à 58. Pour chiffrer un groupe de deux caractères représentés par  $n_1$  et  $n_2$ , nous utilisons une matrice inversible  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

On calcule  $M \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ . Les nombres  $p_1$  et  $p_2$  représentent les deux nouveaux caractères.

Ecrire une fonction permettant de chiffrer et déchiffrer un message. La matrice utilisée pour le chiffrement est `mat = [[13, 7], [20, 11]]`.

### Exercice 5

Résoudre avec la méthode d'Euler le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - b x(t)y(t) \\ y'(t) = -c y(t) + d x(t)y(t) \end{cases} \quad t \in [0; 50]$$

Les valeurs des constantes sont  $a = 0,55$ ,  $b = 0,7$ ,  $c = 0,45$ ,  $d = 0,3$ .

Les conditions initiales sont  $x(0) = 0,8$  et  $y(0) = 1,3$ .

Comparer les résultats obtenus avec le pas  $dt = 0,01$  puis  $dt = 0,001$ .