Informatique en CPGE (2018-2019)
Exercices : nombres

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1,\ 3\}$.

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

1. Ecrire une fonction `divise(p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls p et q, renvoyant True si p divise q et False sinon.
2. Ecrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
3. Ecrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
   Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers : $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.
   (a) Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
   (b) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.
   (c) Ecrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \epsilon$.
   (d) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[50;\ 5000]$.