# Informatique en CPGE (2018-2019)
# Exercice

Un objet en chute dans l'atmosphère (parachutiste par exemple) est soumis à plusieurs forces : son poids, la résistance de l'air (traînée), la poussée d'Archimède (ou plutôt portance, puisqu'il y a mouvement). Pour simplifier on prend en compte le poids et la traînée supposée proportionnelle au carré de la vitesse :

$$m\ddot{z} = \alpha\dot{z}^2 - mg$$

On étudie donc le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{dv}{dt} & = & \dfrac{\alpha}{m}v^2 - g \\ v(t_0) & = & v_0 \end{array}\right.$$

**Question 1** Ecrire une fonction `euler(F,t0,y0,tmax,N)` qui donne une approximation par la méthode d'Euler de la solution du problème de Cauchy $y' = F(y)$, $y(t_0) = y_0$, en renvoyant les deux listes $X = [t_0, \dots, t_N]$ et $Y = [y_0, \dots, y_N]$ de longueur $N + 1$, où $y_i$ est l'approximation de $y(t_i)$ et $t_i = t_0 + i(t_{max} - t_0)/N$. On rappelle que la méthode d'Euler est fondée sur l'approximation

$$y_{i+1} - y_i \simeq y'(t_i) \times (t_{i+1} - t_i) \simeq F(y_i) \times (t_{i+1} - t_i)\ .$$

**Question 2** Ecrire un programme qui résout ce problème avec $\alpha = 0.29$SI, $m = 80$ kg, $g = 9.81$ SI, $N = 500$, $v_0 = 0$, $t_0 = 0$ et $t_{max} = 100$.

**Question 3** Pour obtenir la position du parachutiste au cours du temps, il faut intégrer la solution pour la vitesse : écrire une fonction `Int(T,X)` qui prend comme arguments deux listes de longueur $N+1$ (représentant les valeurs de la variable (temps) et de la fonction à intégrer en ces points), calcule et retourne une valeur approchée de l'intégrale par la méthode des trapèzes. Préciser la complexité de cette fonction.

**Question 4** Ecrire une fonction `altitude(tmax)` à l'aide des fonctions précédentes qui calcule l'altitude $z$ atteinte à l'instant $t_{max}$ en prenant $\alpha = 0.29$ SI, $m = 80$ kg, $g = 9.81$ SI, $v_0 = 0$, et $N = 500$.

En réalité, pour une chute de grande hauteur, il faut tenir compte des variations de densité de l'air et de pesanteur : $\alpha$ et $g$ ne sont pas constants. On adopte l'expression $\alpha = \frac{1}{2}SC_x\rho(z)$ où $S$ est la section de l'objet et $C_x$ le coefficient de résistance aérodynamique qui dépend de sa forme. La densité de l'air dépend de l'altitude, approximativement selon la loi (atmosphère isotherme) $\rho(z) = \rho(0)e^{-kz}$ avec $k = 1.3910^{-4}\text{m}^{-1}$

On veut modéliser le saut de Félix Baumgartner le 14 octobre 2012 : altitude initiale 39000m, durée 4 minutes et 19 secondes avant d'ouvrir son parachute à 2500m d'altitude.

Le problème de Cauchy d'ordre 2 s'écrit :

$$\ddot{z} = \frac{\alpha}{m}e^{-kz(t)}\dot{z}^2(t) - g; \quad z(0) = 39000; \dot{z}(0) = 0$$

ou bien sous forme de problème de Cauchy d'ordre 1 en dimension 2 : $\dot{z} = z_1$

$$\left[\begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{z}_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \frac{\alpha}{m}e^{-kz}z_1^2 - g \end{array}\right]$$

**Question 5** Ecrire un programme qui retourne une solution approchée par la méthode d'Euler (adapter la fonction `euler` précédente) et prévoit la vitesse maximale atteinte.