5.3. Soit $\mathscr{T} = \mathrm{Vect}(T_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i<j)$. Prouver que $\mathscr{M}_n = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n$.

En déduire une base de $\mathscr{M}_n$ constituée de matrices toutes diagonalisables.

5.4. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$.

Exercice 4.

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Ecrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple, si `L=[0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Ecrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur

`M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0,M]\!]$, `T`$[i]$ est le nombre d'occurences dans la liste `L` de l'entier i.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4.

4.1. Soit `L` une liste d'entiers naturels. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que `n` soit indépendant de `M`.

Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers. On définit alors la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la liste A par récurrence comme suit

- $L_0 = A$.
- Si L_n est construite, alors :
  - on détermine $T_n = \mathtt{nb\_oc}(L_n)$.
  - on détermine $I_n = \mathtt{ind}(T_n)$.
  - si $I_n = [i_1, \dots i_r]$, alors $L_{n+1} = [T[i_r], i_r, \dots, T[i_1], i_1]$

Par exemple, si $A = [4,4,1,2]$:

- $L_0 = [4,4,1,2]$
- $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)
- $L_2 = [1,4,2,2,3,1]$ (il y a un « 4 » , deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne `A = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]`. Déterminer L_3 et L_{2018}.

5.2. On donne `B = [2,4,1,1,1,2]`. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.3. On donne `C = [2,4,1,0]`. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en argument une liste `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément $\mathtt{L}_n$ de la suite de Robinson associée à `A`.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 0074 – D'après documents fournis