# Transformation en $Z$

**Exercice 1**

Calculer les transformées en $Z$ des fonctions suivantes, la période d'échantillonnage étant égale à 1 :

1. $f(t) = t^2 U(t)$
2. $g(t) = (t-1)^2 U(t-1)$
3. $h(t) = (t^2+1)U(t)$
4. $i(t+2) = e^{-(t+2)/\theta} U(t+2)$
5. $j(t) = \cos(\omega t + \varphi)U(t)$

**Exercice 2**

1. Calculer et représenter la séquence numérique associée à l'échantillonnage de période $1/2$ du signal $f(t) = t + 1$.
2. Quelle est la séquence numérique associée au signal $f(t)U(t)$ ?
3. Calculer, en utilisant la définition, la transformée en $Z$ du signal causal précédent.
4. Calculer les séquences numériques associées à l'échantillonnage de période $1/2$ des signaux $g(t) = f(t)U(t-1)$ et $h(t) = f(t-1)U(t-1)$. En déduire leur transformée en $Z$.

**Exercice 3**

1. Représenter la séquence $f(n) = n^2 U(n)$ et calculer sa transformée en $Z$ à partir de la définition.
2. En déduire les transformées en $Z$ des séquences : $g(n) = (n+2)^2 U(n+2)$ et $h(n) = (n+2)^2 U(n)$.

**Exercice 4**

Soit $f$ la fonction périodique de période 2 définie par $f(t) = 1$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $1 < t < 2$.

1. Représenter graphiquement $f(t)U(t)$.
2. On échantillonne $f(t)U(t)$ à la période 0,2. Quelle suite obtient-on ?
3. Calculer la transformée en $Z$ de cette suite.

**Exercice 5**

Déterminer les transformées en $Z$ inverse des fonctions suivantes :

1. $F(z) = \dfrac{2z}{z - 0,5}$
2. $F(z) = \dfrac{2,7z}{(z-1,2)^2}$

3. $F(z) = \alpha K \dfrac{z^2}{(z-(1-K))(z-1)}$
4. $F(z) = \dfrac{2z^2 - 8z + 5}{(z-2)(z-1)}$

**Exercice 6**

Etant donné la transformée en $Z$ suivante : $F(z) = \dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ où $a$ est une constante réelle et $T$ la période d'échantillonnage, évaluer sa transformée inverse $f(nT)$ à l'aide des deux méthodes suivantes :

1. Décomposition en éléments simples.
2. Division suivant les puissances croissantes de $z$.

**Exercice 7**

Calculer les originaux des fonctions suivantes. Vérifier le théorème de la valeur initiale et, lorsque c'est possible, le théorème de la valeur finale.

1. $F(z) = e^{a/z}$ avec $a$ réel positif non nul.
2. $G(z) = \dfrac{z^2 - 3}{z^2 - 3z + 2}$
3. $H(z) = \dfrac{z^3 + 2z^2}{(2z-1)(z^2+1)}$

**Exercice 8**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la suite $(a_n)$ vérifiant l'équation récurrente :

1. $2a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$.
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , pour $n \geq 2$ , avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.