

## Tests de validité d'hypothèses

### Exercice 1

Une machine fabrique des tiges d'acier. La variable aléatoire qui associe à chaque tige sa longueur suit la loi normale de moyenne  $\mu = 90$  mm et d'écart-type  $\sigma = 0,16$  mm.

On extrait de la fabrication un échantillon de 100 tiges. On constate que la moyenne des longueurs des tiges de cet échantillon est 89,96 mm.

Construire un test permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification 5 %, l'hypothèse selon laquelle la longueur moyenne des tiges de la fabrication est bien 90 mm.

Utiliser le test avec l'échantillon de l'énoncé.

### Exercice 2

Une machine fabrique des engrenages. La variable aléatoire qui à chaque engrenage associe son diamètre suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .

On annonce un diamètre moyen de 23,65 mm à un client qui commande un lot d'engrenages. Il veut vérifier cette affirmation et mesure les diamètres de 100 engrenages. Il obtient les résultats ci-dessous :

Diamètres	Effectifs
[23,59 ; 23,61 [	6
[23,61 ; 23,63 [	8
[23,63 ; 23,65 [	51
[23,65 ; 23,67 [	30
[23,67 ; 23,69 [	5

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de la distribution de cet échantillon.
2. Le client considère que l'écart-type de l'échantillon est une bonne approximation de l'écart-type du lot qu'il a reçu. Peut-il conclure au seuil de signification 5 % que l'affirmation du fournisseur est exacte ?

### Exercice 3

1. Un sondage a été effectué sur un échantillon de 100 personnes choisies au hasard. 25 % des personnes interrogées ont répondu favorablement.  
Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de personnes favorables sur l'ensemble de la population.
2. Un deuxième sondage, réalisé auprès de 400 personnes, un mois plus tard, donne 26 % de réponses favorables.  
Peut-on, au seuil de 95 %, considérer que le taux de réponses favorables, sur l'ensemble de la population n'a pas changé d'un sondage à l'autre ?

### Exercice 4

Une usine fabrique des petites pièces cylindriques. On suppose que la variable aléatoire  $X$  mesurant le diamètre de ces pièces suit une loi normale de moyenne  $m = 15$  mm et d'écart-type  $\sigma = 0,20$  mm quand la machine est bien réglée.

En vue de contrôler le bon fonctionnement de la machine utilisée dans la fabrication de ces pièces, on décide de construire un test qui, à la suite du prélèvement d'un échantillon de 100 pièces sur la production d'une journée, permette de décider si, au seuil de signification 5 %, la machine est bien réglée.

1. Construction du test bilatéral

On suppose que lorsque la machine fonctionne, la variable aléatoire  $X$  mesurant le diamètre des pièces suit une loi normale de moyenne  $\mu$  inconnue et d'écart-type  $\sigma = 0,20$  mm.

Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de 100 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces.

On suppose que  $\bar{X}$  suit la loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\frac{0,20}{\sqrt{100}}$ .

- (a) Choisir une hypothèse nulle  $H_0$  et une hypothèse alternative  $H_1$  pour ce test bilatéral.
- (b) Déterminer sous l'hypothèse  $H_0$  l'intervalle  $[m - h; m + h]$  tel que :  $P(m - h \leq \bar{X} \leq m + h) = 0,95$ .
- (c) Enoncer la règle de décision de ce test.

2. Utilisation du test

On prélève un échantillon de 100 pièces sur la production d'une journée et on mesure le diamètre de ces pièces.

On obtient les résultats ci-dessous.

diamètre en mm	nombre de pièces
[14,5 ; 14,6[	2
[14,6 ; 14,7[	4
[14,7 ; 14,8[	10
[14,8 ; 14,9[	17
[14,9 ; 15[	20
[15 ; 15,1[	20
[15,1 ; 15,2[	15
[15,2 ; 15,3[	8
[15,3 ; 15,4[	3
[15,4 ; 15,5[	1

- (a) Calculer une valeur approchée de la moyenne de l'échantillon
- (b) En appliquant le test à cet échantillon, peut-on conclure au seuil 5 % que la machine est bien réglée ?