Exercices calcul matriciel

Exercice 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices suivantes : $A + B$, $B + A$, $-2B$ et $3A - 2B$.

Exercice 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer les matrices suivantes : AB et BA.
2. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice $M = 3A + 2B - 5I$.
2. Calculer les matrices suivantes : $N = AB$ et $P = BA$.
3. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 4

1. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}$

   Calculer les matrices suivantes : AB et BA.
2. On considère les matrices : $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Calculer la matrice CD. Que peut-on remarquer ?

Exercice 5

1. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Calculer la matrice $C = A + B$.
3. Calculer la matrice C^3.
4. En déduire les matrices C^9 et C^{13}.

Exercice 6

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puis $A(BC)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 7

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les matrices AI, $3A$ et A^2.
2. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ où O est la matrice nulle.
3. Vérifier que l'égalité précédente peut s'écrire $I = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right)$.
4. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $AB = I$.
   On donnera d'abord l'expression de B en fonction de A et de I , puis sous forme d'un tableau de nombres.
5. Calculer BA et commenter le résultat obtenu.

Exercice 8

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice A^2.
2. On définit A^n pour tout entier n non nul par $A^1 = A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$. On admet que, pour tout entier n non nul, il existe un nombre réel a_n tel que A^n est de la forme :
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $A^{n+1} = A^n A$.
   (b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.
3. Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.
   (a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Calculer b_n puis a_n en fonction de n.
4. En déduire A^n en fonction de n.