Problèmes

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir et emballer des cônes de glaces.

Exercice 1

Partie A

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de glace qu'il contient.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart type σ.

1. Dans cette question $\sigma = 2\sqrt{2}$.
   On choisit au hasard un cône rempli de glace. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la masse de glace qu'il contient soit comprise entre 95 g et 105 g.
2. Un cône est considéré comme " bon " lorsque la masse de glace qu'il contient appartient à l'intervalle $[95; 105]$. Déterminer la valeur du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement " le cône est bon " soit égale à $0,95$ (on donnera le résultat avec deux décimales).

Partie B

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2000 pour la vente en gros. On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,005$.

On nomme Z la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans le lot.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
2. On admet que la loi Z peut être approchée par une loi de Poisson.
   (a) Déterminer le paramètre λ de cette loi.
   (b) Si un client reçoit un lot contenant au moins cinq cônes défectueux, l'entreprise procède à un échange de ce lot. Calculer la probabilité qu'un lot soit échangé.

Exercice 2

La question 3 est indépendante des deux questions 1 et 2.

Une machine usine des billes de roulement à billes. Le diamètre D des billes suit une loi normale de moyenne réglable m et d'écart type σ dépendant de la précision de la machine.

Les résultats, sauf indication contraire, seront donnés à 10^{-2} près.

1. Les billes fabriquées doivent avoir un diamètre de $8 \pm 0,012$ mm.
   (a) La machine a été réglée pour avoir $m = 8$ mm et $\sigma = 0,006$ mm.
   Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard dans la production soit acceptable ?
   (b) La machine étant réglée pour obtenir $m = 8$ mm, quel devrait être l'écart type σ pour que le pourcentage de billes acceptables soit de 99% ? (Le résultat sera donné à 10^{-3} près).
   (c) Après un usage important, l'écart type est passé $\sigma = 0,016$ mm et le réglage plus délicat donne $m = 8,011$ mm. Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard dans la production soit acceptable ?
2. On suppose dans cette question que la proportion de billes acceptables dans la production est de 95%.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n billes choisies au hasard dans la production, associe le nombre de billes défectueuses. On assimile le choix d'un lot à un tirage avec remise.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   Donner son espérance mathématique.
   (b) Soit $n = 10$. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 2 billes défectueuses.
   (c) Soit $n = 100$. On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est la valeur de λ ?
   Quelle est la probabilité que le lot tiré contienne plus de deux pièces défectueuses ?
3. L'usine achète une deuxième machine plus performante. Elle dispose donc d'une machine A fournissant un tiers de la production de l'usine et d'une machine B fournissant le reste de la production.
   95% des pièces produites par la machine A sont acceptable et 99% de celles produites par la machine B sont acceptables.
   (a) On tire au hasard une bille dans la production totale de l'usine. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
   (b) On tire au hasard une bille dans la production totale, on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine B ?

Exercice 3

A la sortie d'une chaîne de fabrication produisant des appareils en grande série, on effectue le contrôle de deux caractéristiques pour chaque appareil. Les applications qui associent à chaque appareil de la production l'une ou l'autre de ces caractéristiques sont assimilées à des variables aléatoires notées X et Y que l'on suppose indépendantes.

La variable X suit une loi normale de moyenne $m = 120$ et d'écart- type $\sigma = 0,05$.
La variable Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

Le premier contrôle est dit favorable si $120 - 0,06 < X < 120 + 0,06$.
Le deuxième contrôle est dit favorable si $Y \geq 1$.

Un appareil est donc considéré comme bon si l'un et l'autre des contrôles sont favorables, dans le cas contraire, il est dit défectueux.

1. Quelle est la probabilité pour que le premier contrôle soit favorable ?
2. (a) Donner l'espérance mathématique ; ou moyenne, de Y.
   (b) On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson dont le paramètre λ est l'espérance mathématique de Y.
   En utilisant cette approximation par la loi de Poisson, calculer une valeur approchée de la probabilité pour que le deuxième contrôle soit favorable.
3. A l'aide des résultats précédents, calculer le pourcentage d'appareils défectueux à l'issue des deux contrôles.

Exercice 4

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.

Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. Etude du nombre de sinistres par véhicule

   Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée.

   On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,28$.

   (a) Calculer la probabilité de l'événement A : " un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée ".

   (b) Calculer la probabilité de l'événement B : " un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée ".

2. Etude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs

   On note E l'événement : " un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée".

   On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,6$.

   On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 conducteurs.

   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

   (a) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

   (b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. Etude du coût des sinistres

   Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

   On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros.

   On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1200 et d'écart type 200.

   Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1000 euros et 1500 euros.

Exercice 5 : Pièces métalliques et contrôle de qualité

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotés sont exprimés en millimètres. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur. Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

1. **Partie A**

   On note E l'événement : "Une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme".

   On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,9.

   On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   (b) Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement 8 pièces au moins soient conformes.

2. **Partie B**

   Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée "machine 1".

   Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

   On suppose que M suit la loi normale de moyenne m_1 = 250 et d'écart type σ_1 = 1,94. On suppose que N suit la loi normale de moyenne m_2 = 150 et d'écart type σ_2 = 1,52.

   (a) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.

   (b) Calculer la probabilité pour que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.

   (c) Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153. On admet que les variables M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est 0,914.

3. **Partie C**

   Une autre machine automatique de l'entreprise, notée "machine 2" fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.

   On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est p_1 = 0,914 et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 soit conforme est p_2 = 0,879.

   La machine 1 fournit 60 % de la production totale des ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

   On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.

   On définit les événements suivants :

   A : "la pièce provient de la machine 1" ;

   B : "la pièce provient de la machine 2" ;

   C : "la pièce est conforme".

   (a) Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C/A)$, $P(C/B)$.

   (On rappelle que $P(C/A)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)

   (b) En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.

   (c) En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer $P(C)$.