Exercices : courbes paramétrées

Exercice 1

Soit $\mathcal{C}$ la courbe du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unités 2 cm), de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = -4t + 4t^2 \\ y = g(t) = 14t - 10t^2 \end{cases}$$

où t appartient à l'intervalle $[0; 1]$.

1. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; 1]$ et présenter les résultats dans un tableau unique.
2. Déterminer les coordonnées des points en lesquels $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.
3. Déterminer un vecteur directeur de la tangente au point $M(0)$ puis au point $M(1)$.
4. Placer les points précédents et construire les tangentes à la courbe en ces points.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ obtenue lorsque t varie dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ la courbe du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unités 4 cm), de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = 12t^2 - 12t + 3 \\ y = g(t) = 8t^3 - 12t^2 + \frac{9}{2}t \end{cases}$$

où t appartient à l'intervalle $[0; 1]$.

1. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; 1]$ et présenter les résultats dans un tableau unique.
2. Déterminer les coordonnées des points en lesquels $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.
3. Déterminer un vecteur directeur de la tangente au point $M(0)$ puis au point $M(1)$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ obtenue lorsque t varie dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 3

1. Etudier la courbe $\mathcal{C}$ du plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unités 2 cm), de représentation paramétrique :

   $$\begin{cases} x = f(t) = (t-1)^2 \\ y = g(t) = t^2\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

   où t appartient à l'intervalle $[-1; 3]$.
2. Tracer les tangentes à la courbe aux points correspondants à $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ puis tracer la courbe.

Exercice 4

$\mathcal{C}$ est la courbe du plan définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos 3t \\ y = g(t) = \cos 4t \end{cases}$$

où t appartient à l'intervalle $[0\pi]$.

1. Exprimer $f(\pi - t)$ en fonction de $f(t)$ et $g(\pi - t)$ en fonction de $g(t)$. En déduire :
   (a) une propriété de la courbe ;
   (b) une réduction de l'intervalle d'étude.
2. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ pour $t \in [0; \pi]$ dans un repère orthonormal d'unités 5 cm.

Exercice 5

La courbe $\mathcal{C}$ est définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos t - \sin t \\ y = g(t) = \cos t + \sin t \end{cases}$$

où t appartient à l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

1. Etudier la périodicité des fonctions f et g puis réduire l'intervalle d'étude.
2. Exprimer $f(t + \pi)$ en fonction de $f(t)$ et $g(t + \pi)$ en fonction de $g(t)$. En déduire une propriété de la courbe et une réduction de l'intervalle d'étude.
3. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$; montrer que $f'(t) = -\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$ et $g'(t) = \sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{4})$.
4. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; \pi]$ et former le tableau de variation.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ obtenue lorsque t varie dans l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 6

$\mathcal{C}$ est la courbe du plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin t \\ y = g(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

où t appartient à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

1. Etudier la parité des fonctions f et g ; en déduire une symétrie de $\mathcal{C}$.
2. Exprimer $f(\pi - t)$ en fonction de $f(t)$ et $g(\pi - t)$ en fonction de $g(t)$. En déduire une deuxième symétrie de $\mathcal{C}$.
3. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et former le tableau de variation.
4. Tracer, en utilisant les deux symétries, la courbe $\mathcal{C}$ obtenue lorsque t varie dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.