Nombres complexes

1 Définition

Il existe un ensemble de nombres, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i (ou parfois j), vérifiant $i^2 = -1$.
3. L'addition et la multiplication vérifient les mêmes propriétés de calcul dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

2 Forme algébrique

2.1 Définition, représentation géométrique

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, a et b étant deux reels.

a est la partie réelle de z : $a = Re(z)$, b est la partie imaginaire de z : $b = Im(z)$.

Représentation géométrique

A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé l'unique point M du plan de coordonnées $(a; b)$; z est appelé "l'affixe" de M.

A tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan de coordonnées $(x; y)$ est associé un unique nombre complexe $z = x + iy$; z est appelé l'affixe de $\overrightarrow{u}$.

Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

2.2 Conjugué

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par

$$\overline{z} = a - ib$$

Remarque : Les points M d'affixe z et M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$

$$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$a = Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad b = Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

2.3 Lignes de niveau des fonctions $z \longrightarrow Re(z)$ et $z \longrightarrow Im(z)$

La ligne de niveau k de la fonction $z \longrightarrow Re(z)$ est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z verifie $Re(z) = k$. Cette ligne de niveau est la droite D_k d'équation $x = k$.

La ligne de niveau k de la fonction $z \longrightarrow Im(z)$ est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z verifie $Im(z) = k$. Cette ligne de niveau est la droite Δk d'équation $y = k$.

3 Forme trigonométrique ou exponentielle

3.1 Définitions

M est le point du plan dont l'affixe est le nombre complexe $z = a + ib$.
Module : On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$, la quantité

$$\rho = |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété : Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $MM' = |z' - z|$.
Argument : On appelle argument du nombre complexe z une mesure θ de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$
Notation : $\theta = \arg(z)$

3.2 Forme trigonométrique ou exponentielle

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \qquad \overline{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho e^{-i\theta}$$

produit :

$$zz' = \rho e^{i\theta}\rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

quotient :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

puissance :

$$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$$

3.3 Formules de Moivre et d'Euler

Formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formule d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.4 Lignes de niveau des fonctions $z \longrightarrow |z - a|$ et $z \longrightarrow \arg(z - a)$

La ligne de niveau $r > 0$ de la fonction $z \longrightarrow |z - a|$ est le cercle de centre le point A d'affixe a et de rayon r.

La ligne de niveau α de la fonction $z \longrightarrow \arg(z - a)$ est la demi-droite d'origine le point A d'affixe a et dont les points M vérifient dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \alpha + 2k\pi$

4 Equations du second degré

4.1 Equation $z^2 = m$, avec $m \in \mathbb{C}$

Méthode trigonométrique :

on a $m = re^{i\theta}$ et on pose $z = \rho e^{i\alpha}$.

Il faut alors résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi \end{array} \right.$

On trouve les deux solutions : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)} \end{array} \right.$

Les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Methode algébrique :
On a $m = a + ib$ et on pose $z = x + iy$.

Il faut alors résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right.$

On trouve deux solutions opposées.

4.2 Equation $az^2 + bz + c = 0$

On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On résoud l'équation :

$$\delta^2 = \Delta$$

qui admet toujours des solutions opposées δ_1 et δ_2 avec éventuellement $\delta_1 = \delta_2 = 0$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet alors deux solutions $z_1 = \dfrac{-b + \delta_1}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta_2}{2a}$ avec éventuellement $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

5 Applications géométriques

Propriété 1 : Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z'
alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

Propriété 2 : Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ont pour affixes respectives z et z'
alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}$ a pour affixe $z + z'$.

Propriété 3 : Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ont pour affixes respectives z et z'
alors l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$ est égal à $arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = arg(z') - arg(z)$.

Propriété 4 : z et $\overline{z}$ sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
z et $-z$ sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'origine.
z et $-\overline{z}$ sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.