Exercices calcul vectoriel

Exercice 1

Montrer, pour $a+b \neq 0$, l'équivalence des trois relations :

- $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$
- Quel que soit le point M : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{a+b}\left(a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}\right)$

Que peut-on dire si $a+b=0$?

Montrer que la troisième relation peut toujours s'écrire : $\overrightarrow{MG} = (1-t)\,\overrightarrow{MA} + t\,\overrightarrow{MB}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit A et B distincts, et P vérifiant la relation : $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec k réel quelconque. Déterminer α et β tels que P est le barycentre de (A,α) et (B,β).

Déterminer suivant les valeurs de k la position de P.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points distincts.

Soit M le barycentre de $(A, 1-t)$ et (B, t) et N le barycentre de $(B, 1-t)$ et (C, t).

Enfin, soit P le barycentre de $(M, 1-t)$ et (N, t).

Prouver que P est le barycentre de $(A, (1-t)^2)$, $(B, 2t(1-t))$ et (C, t^2).

Sur une même figure, construire les points M, N et P lorsque $t = 1/2$, $t = 1/4$ et $t = 3/4$.

Exercice 4

Faire une figure et construire les barycentres :

- G de $(A, 3)$ et $(B, 1)$
- K de $(A, 2)$ et $(B, -3)$
- I de $(A, 500)$ et $(B, 500)$

Exercice 5

A, B et C sont trois points non alignés du plan.

Construire le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

Exercice 6

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(2; -1; 4)$, $B(-1; 3; -1)$ et $C(0; 1; 2)$.

Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

Soit I le milieu de $[AB]$. Prouver que G est le milieu de $[IC]$.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On donne $A(4; 5)$, $B(1; 1)$ et $C(7; 3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Calculer $|| \overrightarrow{BA} ||$ et $|| \overrightarrow{BC} ||$
3. En déduire une valeur approchée de $\alpha = \widehat{ABC}$ à un degré près.

Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On donne $A(2;0)$, $B(0;1)$ et $M(m;m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABM est rectangle en M
2. Vérifier que l'un de ses triangles est isocèle.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne $\vec{V_1}\ (1;2;1)$, $\vec{V_2}\ (3;-1;0)$ et $\vec{V_3}\ (2;-3;1)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$
2. $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$
3. $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$
4. $(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3}$
5. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne les points $A(1;2;1)$, $B(2;0;1)$ et $C(1;1;-1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Calculer $|| \overrightarrow{AB} ||$ et $|| \overrightarrow{AC} ||$.
4. Calculer l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$.

Exercice 11

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

On donne $\vec{u}\ (2;0;0)$, $\vec{v}\ (3;1;0)$ et $\vec{w}\ (1;2;4)$.

1. Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
2. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v}$.
3. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$.
4. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$.
5. Conclusion ? (Formule du double produit vectoriel)

Exercice 12

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

Déterminer un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{u}\ (3;1;-2)$ et $\vec{v}\ (2;1;4)$