Terminale S $\boxed{\text{DEVOIR SURVEILLE 9}}$ 20/05/19

Durée : 4 heures

L'exercice 4, enseignement de spécialité, est A REDIGER SUR UNE FEUILLE SEPAREE.

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f_k(x) = k\,x\,\mathrm{e}^{-kx}$.

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

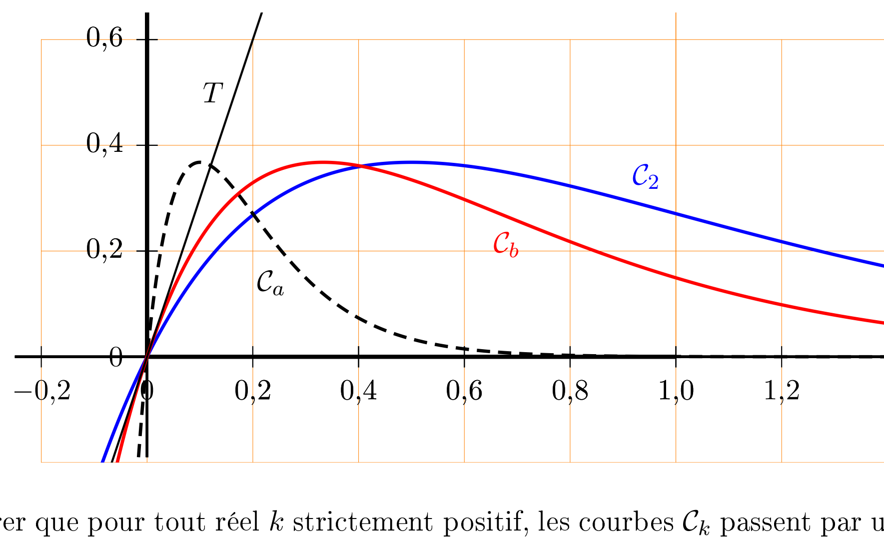
Partie A : Etude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. **a.** Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a :
$$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$
   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d. Ecrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

Exercice 2 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \end{array}\right. , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A$(2\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite d_1.

2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}\,(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. ‘

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1\ ;-2\ ;-3)$, et passant par le point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.

a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Exercice 3 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont exactes. Recopier sur votre copie le numéro de la question et la ou les lettres des réponses justes. Aucune justification n'est demandée. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions **1** et **2**, X une variable aléatoire continue sur $[0;1]$. Sa densité de probabilité f est définie sur $[0\ ;1]$ par $f(x) = \frac{1}{3}(3x^2 + 2x + 1)$.

1. $P(X < 0,5)$ est égale à :

a. $\displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{0,5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

c. 0,292 à 10^{-3} près **d.** 0,708 à 10^{-3} près

2. $E(X)$ est égale à :

a. $\dfrac{23}{12}$ **b.** $\dfrac{23}{36}$

c. 3 **d.** 1

Dans les questions 3 et 4, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A$(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$, B$(3\ ;\ 3\ ;\ 8)$, C$(-3\ ;\ 5\ ;\ 4)$ et D$(1\,;\,2\,;\,3)$.

On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+1\\ y &=& 2t-1\\ z &=& 3t+2\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$

et $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& k+1\\ y &=& k+3\\ z &=& -k+4\end{array}\right.,k\in\mathbb{R}.$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

3. Quelles affirmations sont exactes ?

a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
c. Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.
d. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales.

4. Quelles affirmations sont exactes ?

a. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}'$.
b. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
c. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.
d. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 4 5 points Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$, $u_1=6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur. On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Etude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. a. En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4   5 points   Candidats suivant l'enseignement de spécialité

A REDIGER SUR UNE FEUILLE SEPAREE.

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} b_0 & = & 1\,000 \\ c_0 & = & 1\,500 \\ b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

2. On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

b. On admet que $A = PTQ$.
Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N + 1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0,3R + 0,5C$
	C prend la valeur $-0,5R + 1,3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1\,000 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1\,500 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix}$$

et $n \leqslant 10 \times 1,1^n$.

a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
A la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?