Loi de Poisson

Exercice 1

2 $\%$ des bouteilles d'eau fabriquées par une usine sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard associe le nombre de bouteilles défectueuses.
On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 2 notée $\mathcal{P}(2)$.

Déterminer la probabilité des trois événements suivants :
A : "Un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse"
B : " Un tel lot a exactement une bouteille défectueuse"
C : " Un tel lot a au plus deux bouteilles défectueuses".

Exercice 2

Une usine fabrique en grande série des pièces métalliques. Certaines pièces présentent un défaut. Le contrôle de qualité relatif au défaut s'effectue par des prélèvements d'échantillon de 100 pièces, dans le stock.
On considère la variable aléatoire X qui mesure le nombre de pièces de l'échantillon présentant le défaut. On admet qu'étant donné la taille de l'échantillon et la probabilité du défaut, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de l'échantillon ne présente le défaut.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait trois pièces exactement qui présentent le défaut.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces présentant le défaut.

Exercice 3

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera arrondie à 10^{-3}.
Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.
On note X la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E_1 : "Un jour donné, il y a exactement trois absents" ;
   (b) E_2 : "Un jour donné, il y a strictement plus de deux absents" ;
   (c) E_3 : "Un jour donné, le nombres d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises)"
3. Calculer l'espérance mathématique notée $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   Que représente $E(X)$?
4. On approche la loi binomiale de la question 1) par une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la valeur de λ.
   En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question 2.
   Vérifier que les résultats obtenus ici sont proches de ceux obtenus à la question 2).

Exercice 4

Dans une entreprise de vente par correspondance une étude statistique a montré que 5 % des bons de commandes comportent au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné.

Le nombre de bons de commande traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1. Déterminer, à l'aide de la table du formulaire, la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) E_1 : "il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100" ;
   (b) E_2 : "il y a moins de 5 bons erronés parmi les 100" ;
   (c) E_3 : "il y a au moins 5 bons erronés parmi les 100" ;
2. Déterminer le plus petit entier k tel que la probabilité d'avoir moins de k erreurs soit supérieure à 0,9.

Exercice 5

Une entreprise de matériel produit des pièces pour l'industrie. Dans un important stock de ces pièces, on prélève au hasard 100 pièces pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses. On suppose que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est égale à 0,06.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : Il n'y a aucune pièce défectueuse,
   - B : Il y a exactement 5 pièces défectueuses,
   - C : Il y a au plus 5 pièces défectueuses.
3. On approche la loi binomiale suivie par X par une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer λ. Calculer les probabilités des événements A, B et C.