Développements limités

Exercice 1 : calcul de développements limités

Calculer pour chaque fonction le développement limité au voisinage de zéro à l'ordre 1, à l'ordre 2, puis à l'ordre 3 :

1. $f(x) = e^x$; $\quad f(x) = e^{2x}$; $\quad f(x) = e^{-2x}$; $\quad f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$
2. $f(x) = \cos x$; $\quad f(x) = \cos(2x)$; $\quad f(x) = \cos(-x)$; $\quad f(x) = \cos(\frac{x}{2})$
3. $f(x) = \sin x$; $\quad f(x) = \sin(2x)$; $\quad f(x) = \sin(-x)$; $\quad f(x) = \sin(\frac{x}{2})$
4. $f(x) = \ln(1+x)$; $\quad f(x) = \ln(1+2x)$; $\quad f(x) = \ln(1-x)$; $\quad f(x) = \ln(1+\frac{x}{2})$
5. $f(x) = (1+x)^\alpha$; $\quad f(x) = (1+2x)^\alpha$; $\quad f(x) = (1-x)^\alpha$
6. $f(x) = \sqrt{1+x}$; $\quad f(x) = \sqrt{1-x}$; $\quad f(x) = \sqrt{1+2x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $\quad f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

Exercice 2 : calcul de développements limités

Calculer pour chaque fonction le développement limité au voisinage de zéro à l'ordre 2 puis à l'ordre 3 :

1. $f(x) = \ln(1+x) - \sin x$
2. $f(x) = \cos x - \sin x$
3. $f(x) = \cos x + x^2$
4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

Exercice 3 : position d'une courbe par rapport à sa tangente en zéro

Pour chaque fonction, déterminer une équation de sa tangente au point d'abscisse zéro et étudier la position de sa courbe représentative par rapport à cette tangente.

1. $f(x) = \ln(1-x)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$
3. $f(x) = x\cos x$
4. $f(x) = (x-1)\sin x$

Exercice 4 : position d'une courbe par rapport à sa tangente en zéro

1. Si $f(x) = 2 - x - 2x^3 + x^3\epsilon(x)$, placer la courbe d'équation $y = f(x)$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0 ; construire la tangente et l'allure de cette courbe sur l'intervalle $[-0,5; 0,5]$.
2. Pour les équations de courbes suivantes, donner l'équation de la tangente en 0 puis construire la tangente et l'allure de cette courbe pour $x \in [-0,5; 0,5]$:

   $y = -x - 2x^3 + x^3\epsilon(x)$ $\qquad y = -1 + \frac{2}{3}x - x^3 + x^3\epsilon(x)$

   $y = 2 - x^3 + x^3\epsilon(x)$ $\qquad y = -1 + 2x^2 + 5x^3 + x^3\epsilon(x)$

3. Soit p un polynôme défini par $p(x) = (1-x)^4$: , justifier que p admet un développement limité d'ordre 2, en tout point a réel ; écrire ce développement limité d'ordre 2 quand $a = 0$. Placer la courbe d'équation $y = p(x)$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 5 : position d'une courbe par rapport à une autre

On considère les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $y = x^2 + 1$.
Montrer, en utilisant un développement limité, que ces courbes sont tangentes au point de coordonnées (0 ; 1). Etudier leurs positions relatives.

Exercice 6 : calculs de limites

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 7 : étude d'une fonction

On étudie la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 5\ln(1+x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Etudier la fonction f.
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de zéro.
3. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x^2$. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ au voisinage de zéro.

Exercice 8 : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.
4. Donner le développement limité d'ordre 3 de $f(x) - (2-x)$ au voisinage de zéro ; en déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à T pour x voisin de 0.
5. Tracer $\mathcal{C}$ et T dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).