Loi binomiale et loi de Poisson

1 Loi binomiale

Sur un groupe donné de personnes, on sait que les $\frac{2}{5}$ d'entre elles savent parler anglais couramment.

On s'intéresse aux deux expériences aléatoires suivantes :

• 1^{re} expérience : on choisit au hasard une personne de ce groupe et on considère la variable aléatoire X qui, à chaque personne du groupe, associe 1 si cette personne parle anglais couramment et 0 dans le cas contraire.

• 2^{e} expérience : on choisit au hasard trois personnes de ce groupe et on considère la variable aléatoire S qui, à chaque groupe de trois personnes, associe le nombre de personnes parlant anglais couramment.

1.1 Schéma de Bernoulli

Pour la 1ère expérience :

On appelle A l'événement : "la personne parle anglais couramment".

On a donc $P(A) = P(X = 1) = \frac{2}{5}$ et $P(\overline{A}) = P(X = 0) = \frac{3}{5}$

D'où le tableau de la loi de probabilité de X à compléter :

k	0	1	Total
$p(X = k)$			1

D'une manière générale, si une variable aléatoire X ne prend que 2 valeurs 0 et 1 et si $P(X = 1) = p$, alors on dit qu'elle suit la loi de Bernoulli de paramètre p. On peut aussi dire que X est une variable de Bernoulli.

La loi de probabilité de X est alors donnée par le tableau :

k	0	1	Total
$p(X = k)$	$1 - p$	p	1

Remarque : on parle d'épreuves de Bernoulli s'il n'y a que 2 résultats possibles nommés : "succès" et "échec".

Calcul de l'espérance mathématique et de la variance de X dans le cas général :

En appliquant les formules de calcul, vérifier que

$$E(X) = p \qquad E(X^2) = p \qquad V(X) = p(1 - p)$$

1.2 Loi binomiale

Pour la 2ème expérience : On constitue un échantillon en choisissant au hasard et successivement, avec remise si la population est finie, trois personnes parmi la population.

A chaque échantillon, on associe le nombre S de personnes qui parlent anglais couramment.

On exprime la variable aléatoire S à l'aide de 3 variables de Bernoulli X_1, X_2 et X_3 définies de la manière suivante : pour tous les entiers i tels que $1 \leq i \leq 3$, X_i est la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 3, associe 1 si la i-ème personne choisie parle anglais couramment et 0 dans le cas contraire ; on a $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Quelles sont les valeurs prises par S ?

• Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont des variables de Bernoulli ;
• Le paramètre de X_1 est $\frac{2}{5}$ puisque $P(X_1 = 1) = \frac{2}{5}$;
• L'événement $(X_2 = 1)$ est indépendant de la première personne choisie puisque le tirage des personnes se fait avec remise. On a donc $P(X_2 = 1) = \frac{2}{5}$; de même $P(X_3 = 1) = \frac{2}{5}$;

Ainsi S est la somme de 3 variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{2}{5}$.
On peut alors à l'aide d'un arbre déterminer la loi suivie par S. Tracer l'arbre.
On obtient par exemple : $P(A; A; \overline{A}) = P(A; \overline{A}; A) = P(\overline{A}; A; A) = P(A) \times P(A) \times P(\overline{A})$
Ainsi on peut calculer les probabilités associées à chaque valeur de S :
$P(S = 0) = \ldots$; $P(S = 1) = \ldots$; $P(S = 2) = \ldots$; $P(S = 3) = \ldots$

Compléter alors le tableau de la loi S :

k	0	1	2	3	Total
$p(S = k)$					1

On dit que S suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{5}$.

Cas général :
Si une variable aléatoire S est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre p, alors S suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour chaque entier k tel $0 \leq k \leq n$ on a alors : $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$.

On écrit en abrégé : S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Remarque : les probabilités obtenues correspondent aux termes successifs de la formule du binôme de Newton, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

1.3 Espérance mathématiques, variance et écart type

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors les propriétés sur l'espérance mathématique permettent d'obtenir :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = np$$

L'indépendance des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ assure que :

$$V(S) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = npq$$

et

$$\sigma(S) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}$$

Exemple :
Pour notre exemple, on a $E(S) = \ldots$
$V(S) : \ldots$ et $\sigma(S) = \ldots$

Remarques :
Les conditions à remplir pour se trouver dans le cadre d'une loi binomiale sont les suivantes :

- L'expérience aléatoire consiste à répéter une même épreuve n fois de suite ;
- On compte les épreuves conformément à une certaine propriété appelée parfois "succès" ou "échec" ;
- Pour toutes les épreuves, la probabilité d'obtenir un "succès" est toujours la même p ;
  Cette dernière condition est réalisée lorsque l'expérience aléatoire est une succession de tirages avec remise.

2 Loi de Poisson

On peut généraliser les définitions et propriétés d'une variable aléatoire dans le cas où X prend une infinité dénombrable de valeurs ; par exemple $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Les formules avec " $\sum_{i=1}^{n}$" restent valables mais s'écrivent alors avec le symbole " $\sum_{i=1}^{\infty}$ ".

Une loi usuelle de ce type de variable aléatoire est la loi de Poisson qui peut être considérée comme un cas limites des lois binomiales.

2.1 Définition

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, ($\lambda > 0$), si sa loi de probabilité est telle que pour tout entier naturel k, $\quad P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

En abrégé, on écrit X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque : la loi de Poisson est souvent utilisée pour approximer certaines lois discrètes. On l'appelle aussi loi des événements rares. Elle est relative aux nombres de réalisations d'un même événement au cours d'un intervalle de temps de longueur donnée, ou sur une ligne, une surface ou dans un volume donnés.

2.2 Espérance mathématiques, variance et écart type

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$E(X) = \lambda, \qquad V(X) = \lambda, \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

.

2.3 Table de la loi de Poisson

(Voir le formulaire officiel pour une table complète).

Contrairement à la loi binomiale qui a deux paramètres n et p, la loi de Poisson n'a qu'un seul paramètre λ.

Exemple d'utilisation : La variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant à un guichet d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes, entre 14h30 et 16h30, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

La table du formulaire ci-dessous, donne pour $\lambda = 5$, les probabilités des événements $(X = k)$ pour tout entier k, $\quad 0 \leq k \leq 14$.

k	$\lambda = 5$
0	$0,007$
1	$0,034$
2	$0,084$
3	$0,140$
4	$0,176$
5	$0,176$
6	$0,146$
7	$0,104$
8	$0,065$
9	$0,036$
10	$0,018$
11	$0,008$
12	$0,003$
13	$0,001$
14	$0,00$

Calculer la probabilité qu'entre 16h et 16h10,

- 4 personnes se présentent au guichet
- 8 personnes au moins se présentent au guichet

Donner $E(X)$ et interpréter ce résultat.

3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Exemple :

Dans une entreprise, on considère que la probabilité d'obtenir un article défectueux à la sortie d'une chaîne de fabrication est $p = 0,05$. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles.

Nous considérons que la production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à 120 tirages avec remise, donc indépendants.

La variable aléatoire X mesurant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon suit la loi binomiale $\mathcal{B}(120; 0,05)$ et l'espérance mathématique de X est $E(X) = 120 \times 0,05 = 6$.

Comparer la loi de X avec celle d'une autre variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(6)$.

Pour cela, calculer $P(X = k)$ pour $0 \leq k \leq 16$ et comparer les résultats obtenus avec ceux du formulaire pour la loi de poisson $\mathcal{P}(6)$.

On observe que la loi de la variable Y est suffisament proche de celle de X pour qu'on puisse utiliser la loi de Poisson pour calculer par exemple la probabilité qu'un échantillon de 120 articles contienne au moins un article défectueux, puis la probabilité que cet échantillon contienne au plus trois articles défectueux.

En pratique, on admet que :

Si n est "grand", p "voisin" de 0 et np pas " trop grand ", alors la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est très proche de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$.

On convient en général d'utiliser cette approximation lorsque $n \geq 30, p \leq 0,1$ et $np < 15$, ou lorsque $n \geq 50, p \leq 0,1$ et $np < 10$.