Courbes de Bézier et barycentres ou contraintes

1 Courbes de Bézier et barycentres

Une application pratique du barycentre est la construction des Courbes de Bézier en Conception Assistée par Ordinateur.

1.1 Introduction

Soit $M(t)$ le barycentre de $(A, 1-t)$, (B, t).
t est la proportion du segment $[AB]$ où se situe le point $M(t)$:
$t = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = A$
$t = 0,5 \quad \Longrightarrow \quad M =$ milieu de $[AB]$
$t = 1 \quad \Longrightarrow \quad M = B$
Quand t parcourt l'intervalle $[0, 1]$, il est clair que le point $M(t)$ décrit tout le segment $[AB]$.

Vocabulaire : le segment $[AB]$ est la Courbe de Bézier de degré 1 avec les points de contrôle A et B. Les polynômes $1 - t$ et t sont les polynômes - poids de Bernstein de degré 1.

1.2 Première construction

Construisons une courbe paramétrée en rajoutant une 2ème étape à ce qui précède :
1ère étape :
- Soit $M_1(t)$ le barycentre de $(A, 1-t)$, (B, t) ; $M_1(t)$ décrit $[AB]$.
- Soit $M_2(t)$ le barycentre de $(B, 1-t)$, (C, t) ; $M_2(t)$ décrit $[BC]$.

2ème étape :
- Soit $M(t)$ le barycentre de $(M_1, 1-t)$, (M_2, t).

Remarque : $M(t)$ se situe à la même proportion du segment $[M_1M_2]$ que M_1 par rapport au segment $[AB]$ ou M_2 par rapport au segment $[BC]$.

Propriété de la construction : La courbe obtenue est l'enveloppe des segments $[M_1M_2]$: en tout point M, la tangente à la courbe est le segment $[M_1M_2]$.

$M(t)$ décrit alors une Courbe de Bézier de degré 2, qui, par construction commence en A et se finit en C, et a pour tangentes (AB) en A et (BC) en C. C'est en fait un arc de parabole.

Les propriétés d'association du barycentre nous permettent d'exprimer $M(t)$ plus directement : $M(t)$ est ainsi le barycentre de $(A, (1-t)^2)$, $(B, 2t(1-t))$, (C, t^2).

Vocabulaire : $M(t)$ décrit la Courbe de Bézier de degré 2 avec 3 points de contrôle A, B et C. Les Polynômes $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 sont les polynômes - poids de Bernstein de degré 2.

1.3 Deuxième construction

Construisons une courbe paramétrée en rajoutant une 3ème étape à ce qui précède :
1ère étape : 3 Courbes de Bézier de degré 1 :
- Soit $M_1(t)$ le barycentre de $(A, 1-t)$, (B, t) ; $M_1(t)$ décrit $[AB]$.
- Soit $M_2(t)$ le barycentre de $(B, 1-t)$, (C, t) ; $M_2(t)$ décrit $[BC]$.
- Soit $M_3(t)$ le barycentre de $(C, 1-t)$, (D, t) ; $M_3(t)$ décrit $[CD]$.

2ème étape : 2 Courbes de Bézier de degré 2 :

– Soit $N_1(t)$ le barycentre de $(M_1, 1-t)$, (M_2, t)
– Soit $N_2(t)$ le barycentre de $(M_2, 1-t)$, (M_3, t)
3ème étape : 1 Courbe de Bézier de degré 3 :
– Soit $M(t)$ le Barycentre de $(N_1, 1-t)$, (N_2, t)

On obtient un schéma pyramidal, le schéma de De Casteljau, que l'on pourrait prolonger ; le nombre d'étapes nous donne le degré de la courbe obtenue au final.

Les propriétés d'association du barycentre nous permettent d'exprimer $M(t)$ plus directement : $M(t)$ est ainsi le barycentre de $(A, (1-t)^3)$, $(B, 3t(1-t)^2)$, $(C, 3t^2(1-t))$, (D, t^3).

Vocabulaire : $M(t)$ décrit la Courbe de Bézier de degré 3 avec 4 points de contrôle A, B, C et D. Elle part de A pour finir en D. C'est en fait un arc de Cubique

Les polynômes $(1-t)^3$, $3t(1-t)^2$, $3t^2(1-t$ et t^3 sont les polynômes - poids de Bernstein de degré 3.

Intérêt du degré 3 : en plus des courbes d'une plus forte régularité, il permet de dessiner des plis (comme ceux de la cubique d'équation : $y = x^3 - 3x$, en $x = 1$ ou -1), ou des points d'inflexion (comme celui de la cubique d'équation : $y = x^3 - 3x$, en $x = 0$), ou des points de rebroussements (comme le point médian dans le chiffre 3), ou des points doubles (comme le croisement dans la lettre α), ce que le degré 2, avec ses arcs de paraboles, ne sait pas faire !

Cas particulier : courbe d'un polynôme de degré 3 :

On peut définir la courbe de la fonction f de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (fonction cubique, de dérivée $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$), comme une courbe de Bézier à 4 points de contrôle.

On s'impose leurs abscisses : $x_A < x_B < x_C < x_D$ suite arithmétique : ainsi f est définie sur l'intervalle $[x_A, x_D]$.

On voudrait alors savoir comment déterminer les ordonnées y_A , y_B , y_C , y_D.
– Pas de problème pour les 2 extrémités A et D : elles sont sur la courbe de f : $y_A = f(x_A)$ et $y_D = f(x_D)$.
– Quant aux 2 points intermédiaires B et C, ils sont chacun sur une tangente à la courbe de f : B sur la tangente en A : $y_B = y_A + (x_B - x_A)f'(x_A)$; C sur la tangente en D : $y_C = y_D + (x_C - x_D)f'(x_D)$.

Remarque : de nombreux logiciels de dessin utilisent les courbes de Bézier de degré 3.

1.4 Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe de Bézier C de points de définition $P_0(1; 2)$, $P_1(5; 4)$ et $P_2(8; 3)$.

1. Pour tout t de $[0; 1]$, on note $G_1(t)$ le barycentre des points pondérés $(P_0, 1-t)$ et (P_1, t), et $G_2(t)$ le barycentre des points pondérés $(P_1, 1-t)$ et (P_2, t).
   On rappelle que le barycentre $M(t)$ des deux points pondérés $(G_1, 1-t)$ et (G_2, t) est un point de la courbe C, et que la tangente à C en ce point $M(t)$ est la droite $(G_1(t)G_2(t))$.
   (a) Pour les valeurs suivantes de t, placer les points $G_1(t)$, $G_2(t)$ et $M(t)$ sur une même figure : $t = 0$, $t = 1/4$, $t = 1/3$, $t = 1/2$, $t = 2/3$, $t = 3/4$, $t = 1$.
   (b) En déduire l'allure de la courbe C.
2. On rappelle que la courbe de Bézier C a pour représentation paramétrique :
   $$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{2} B_{i,2}(t)\overrightarrow{OP_i}$$
   où le nombre t varie dans l'intervalle $[0; 1]$.

(a) Déterminer les coordonnées $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du point $M(t)$.

(b) Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; 1]$ et regrouper les résultats dans un tableau.

(c) Quelle information supplémentaire apporte le tableau de variation ?

(d) Tracer la courbe C.

1.5 Historique et autres propriétés importantes des Courbes de Bézier

Le concept a été développé initialement dans le cadre de la construction automobile en France à partir des années 60, par des ingénieurs (Bézier chez Renault, De Casteljau chez Citroën) qui cherchaient à définir de la manière la plus concise les courbes des carrosseries.

Une Courbe de Bézier est une courbe paramétrique qui permet très simplement, par construction itérée de barycentres (Algorithme de Casteljau), de réaliser un arc de courbe continu d'extrémités imposées, et avec des Points de Contrôle qui définissent les tangentes à cette courbe.

Après traduction de cette construction en coordonnées du point $M(t)$ décrivant la Courbe de Bézier, on se rend compte que les Points de Contrôle définissent plus exactement les vitesses (pour Bézier de degré 2), voire les accélérations (pour Bézier de degré 3) du point $M(t)$.

Une Courbe de Bézier revient à réaliser une sorte de Moyenne Pondérée d'une suite de segments contigus, bornés par les Points de Contrôle.

Remarque : Les propriétés du barycentre (conservé par transformation affine quelconque) entraînent la propriété suivante : appliquer une même transformation affine à tous les points de contrôle revient à appliquer cette transformation affine à l'ensemble de la courbe.

Les Courbes de Bézier et courbes dérivées sont ainsi à la base des polices vectorielles de caractères et images vectorielles utilisées actuellement dans nos ordinateurs.

Par exemple : mettre une lettre de police vectorielle en italiques revient à déplacer ses points de contrôle supérieurs vers la droite d'autant plus qu'ils sont éloignés de la base de la lettre, invariante (par une transformation affine appelée "cisaillement") ; de même, en dessin d'animation, le morphing d'une courbe est beaucoup plus simple à décrire par la seule dynamique de ses points de contrôle.

2 Présentation par vecteurs et contraintes

2.1 Définition

On considère une courbe de Bézier associée aux $n + 1$ points de contrôle P_0, P_1, ..., P_n. Elle a pour représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$\text{avec } t \in [0; 1].$$

où les $B_{i,n}(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n.

La courbe de Bézier a pour extrémités les points de définition P_0 et P_n.
$\overrightarrow{P_0P_1}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_0 à la courbe de Bézier.
$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_n à la courbe de Bézier.

On définit alors $n + 1$ vecteurs $\overrightarrow{V_0}$, $\overrightarrow{V_1}$, ..., $\overrightarrow{V_n}$ par :

$$\overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{OP_0}\,, \quad \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{P_0P_1}\,, \quad \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{P_1P_2}\,, \quad \ldots \quad , \quad \overrightarrow{V_n} = \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

et une courbe à l'aide de ces $n+1$ vecteurs, c'est-à-dire un ensemble de points $M(t)$ tels que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\overrightarrow{V_i}$$

avec entre autres les contraintes suivantes :

f_0, f_1, f_2, …, f_n sont des fonctions polynômes de degré n et la variable t varie dans $[0;1]$;
$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{V_0}$, (pour $t=0$, le point M est en P_0) ;
$\overrightarrow{OM}(1) = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_1} + \ldots + \overrightarrow{V_n}$, (pour $t=1$, le point M est en P_n) ;

2.2 Remarque

$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{V_0}, \quad \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_1}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}, \quad \ldots \quad , \quad \overrightarrow{OP_n} = \sum \overrightarrow{V_i}.$

On peut donc exprimer chaque fonction $f_i(t)$ à l'aide des polynômes de Bernstein et réciproquement.

Par exemple en utilisant :

$$\overrightarrow{OM}(t) = f_0(t)\overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)(\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_{i-1}})$$

on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n-1}(f_i(t) - f_{i+1}(t))\overrightarrow{OP_i} + f_n(t)\overrightarrow{OP_n}$$

soit : $B_{n,n}(t) = f_n(t)$ et pour $i < n$, $B_{i,n}(t) = f_i(t) - f_{i+1}(t)$

2.3 Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la courbe de Bézier C associée à trois vecteurs $\overrightarrow{V_0}$, $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, a pour représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{V_0} + (-t^2 + 2t)\overrightarrow{V_1} + t^2\overrightarrow{V_2}$$

où le nombre réel t varie dans l'intervalle $[0;1]$.

1. On donne les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{V_0}(1;2)$, $\overrightarrow{V_1}(2;4)$, $\overrightarrow{V_2}(4;3)$
   (a) Exprimer en fonction de t les coordonnées $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du point $M(t)$.
   (b) Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0;1]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
   (c) Préciser les directions des tangentes à la courbe C aux points $M(0)$, $M(1/2)$ et $M(1)$ obtenus pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.
   (d) Construire ces tangentes et la courbe C.
2. Déterminer les coordonnées des points de contrôle et comparer la définition donnée de la courbe avec celle utilisant les polynômes de Bernstein.
3. On remplace maintenant le vecteur $\overrightarrow{V_1}(2;4)$ par le vecteur $\overrightarrow{V_1}(2;1)$. Reprendre les quatre questions de la question 1.
4. Le changement du vecteur a-t-il une influence locale ou globale sur la courbe de Bézier ?